



منبع:

۱ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۲

الف

$$f(x) = \frac{\omega \tan x}{1 - \sin x} \rightarrow f'(x) = \frac{(\omega \tan x)' (1 - \sin x) - (1 - \sin x)' \omega \tan x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\frac{\omega(1 + \tan^2 x)(1 - \sin x) - (-\cos x) \omega \tan x}{(1 - \sin x)^2}$$

ب

$$g(x) = \cos^v(x^v) = (\cos x^v)^v$$

$v \cos^v(x^v) = v \cos^{v-1}(x^v) \cdot (-v x^{v-1} \sin x^v)$

$v \cos^v(x^v) \cdot (\cos x^v)' = v \cos^{v-1}(x^v) \cdot (-v x^{v-1} \sin x^v)$

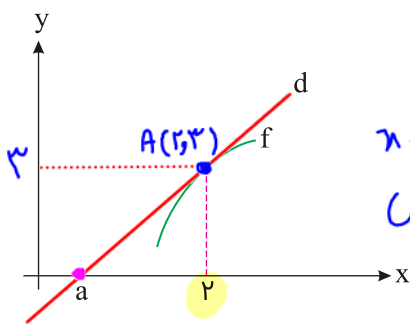
پ

$$h(x) = (3x + \omega)^6 \cdot h'(x) = 6(3x + \omega)^5 (3x + \omega)' = 6(3x + \omega)^5 \cdot 3$$

$$h'(x) = 18(3x + \omega)^5$$

۲ خط d در نقطه با طول x = 2 بر نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$  مماس است. باتوجه به شکل مقدار a نقطه برخورد خط d با محور xها را بیابید.

$$x = 2 \rightarrow f(2) = -4 + 12 - 5 = 3$$



$$f'(x) = -2x + 6$$

$$x = 2 \rightarrow f'(2) = -4 + 6 = 2 \leftarrow \text{شیب خط مماس}$$

معادله خط:  $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 3 = 2(x - 2)$$

$$y - 3 = 2x - 4 \rightarrow y = 2x - 1$$

$$(a, 0) \rightarrow 0 = 2a - 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۴۰۲

۳ معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = 2t^3 + t - 1$  است،

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۴۰۲

$$t = 2 \rightarrow f(2) = 16 + 2 - 1 = 17$$

$$t = 1 \rightarrow f(1) = 2 + 1 - 1 = 2$$

الف) سرعت متوسط متحرک در بازه [1, 2] را محاسبه کنید.  $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{17 - 2}{1} = 15$    
 آهنگ تغییر متوسط

ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه  $t = 2$  چقدر است؟  $f'(t) = 4t^2 + 1 \xrightarrow{t=2} f'(2) = 4(2^2) + 1 = 17$    
 آهنگ لحظه‌ای

۴ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۴۰۲

$$(u \cdot v)' \rightarrow u'v + v'u$$

$$f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^6 - 2x)$$

$$f'(x) = (2\sqrt{x} + 1)'(x^6 - 2x) + (x^6 - 2x)'(2\sqrt{x} + 1)$$

$$f'(x) = (2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^6 - 2x) + (6x^5 - 2)(2\sqrt{x} + 1)$$

$$g(x) = \frac{3x + 1}{x^5 - x + 1}$$

۵ اگر  $f(x) = 2x^3 + 1$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  باشند، حاصل  $(f + g)'(4) + (f \times g)'(1)$  را به دست آورید.   
 $f'(x) = 6x^2$   $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۲

$$f'(4) + g'(4) + f'(1)g(1) + g'(1)f(1)$$

$$f'(4) = 6 \times 16 = 96$$

$$96 + \frac{1}{4} + 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2$$

$$g'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$96 + \frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{2}$$

$$f'(1) = 6 \times 1 = 6$$

۶ آهنگ تغییر متوسط تابع  $f(x) = \sqrt{x + 5}$  را وقتی تغییر از  $x = -1$  به  $x = 4$  تغییر می‌کند به دست آورید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۲

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$f(4) = \sqrt{9} = 3$$

$$f(-1) = \sqrt{4} = 2$$

۷ تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری تابع را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۲

$$\lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 1} (n + 1) = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 1} (n^2 + n) = 2$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

تابع در  $n = 1$  پیوسته است

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$f'_-(1) = 3$$

$$\rightarrow f'_-(1) \neq f'_+(1) \rightarrow \text{نقطه ناپیوستگی دارد}$$

$$f'_+(1) = 1$$

۸ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۲

تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط  $f(a) = 0$  و  $f'(a) = 0$  برقرار باشد.

۹

معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 + 2t + 3$  برحسب متر در بازه زمانی  $[0, 2]$  (ت برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی  $[0, 2]$  با هم برابرند؟

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۴۰۲

جمله‌های زیر را کامل کنید.

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۴۰۲

$$f'(n) = -2n^2$$

$$f''(n) = -4n \xrightarrow{n=1}$$

۱۰ اگر  $f(x) = -x^3$  آن‌گاه  $f''(1)$  برابر است با ..... -۴

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۴۰۲

$$g(x) = \frac{(2x-1)^f}{x^3+8}$$

$$g'(n) = \frac{((2n-1)^f)'(n^3+8) - (n^3+8)'(2n-1)^f}{(n^3+8)^2}$$

$$g'(n) = \frac{f(2n-1)^{f-1}(2)(n^3+8) - (3n^2)(2n-1)^f}{(n^3+8)^2}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+1} \rightarrow f'(n) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{(2n+1)^2}}$$

$$\sqrt[3]{u} \rightarrow \frac{u'}{3 \sqrt[3]{u^2}}$$

$$f(n) = (2n+1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(n) = \frac{1}{3} (2n+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3 (2n+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{(2n+1)^2}}$$

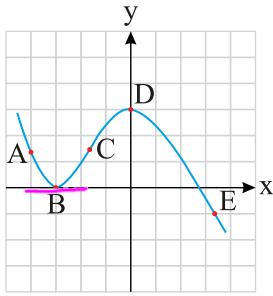
۱۳ اگر  $f(x) = \frac{1}{x}$  آن‌گاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید:  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۴۰۲

$$f'(n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} \quad \text{سبب مشتق با تعریف}$$

$$f'(n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n+h} - \frac{1}{n}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{n - n - h}{n(n+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{n(n+h) \cdot h}$$

$$f'(n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h n (n+h)} = -\frac{1}{n(n)} = -\frac{1}{n^2}$$



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۲

مقدار تابع  
 + نقطه بالای محور ها :  
 - : پایین

مقدار مشتق  
 + : موجی سینوسی  
 - : موجی کوسی  
 عرض  
 بیشترین

الف در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟ E

ب در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟ B

پ در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟ C

ت شیب نقاط D و A را باهم مقایسه نمایید.  $m_D > m_A$

۱۵ تابعی با ضابطه  $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+2}$  را در نظر بگیرید:

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۲

الف آهنگ تغییر متوسط در بازه  $[-2, 0]$  را به دست آورید.

ب آهنگ تغییر لحظه‌ای در  $x = -1$  را به دست آورید.

مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۲

$$f(x) = (x^6 + 2x)(\sqrt{x})$$

$$g(x) = 3 \tan x - \sin^3(2x)$$

$$g'(x) = 3(1 + \tan^2 x) - 3(\sin 2x)'(\sin 2x)$$

$$g'(x) = 3(1 + \tan^2 x) - 3 \sin^2(2x) (2) \cos 2x$$

$$\sin u \rightarrow u' \cos u$$

$$4/21 \sin u \rightarrow u' \cos u$$

با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = \sqrt{x-2}$  را در نقطه  $x = 2$  بررسی نمایید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۲

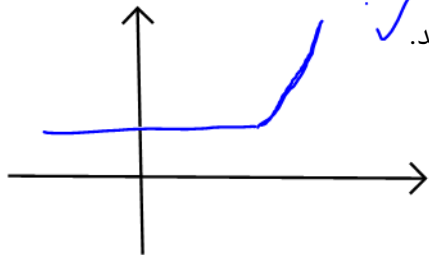
$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a} \rightarrow f'(2) = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{\sqrt{n-2} - 0}{n-2}$$

$$f'(2) = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{\sqrt{n-2}}{n-2} \times \frac{\sqrt{(n-2)^2}}{\sqrt{(n-2)^2}} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(n-2)}{(n-2)\sqrt{(n-2)^2}} = \frac{1}{0^+}$$

$$f'(2) = +\infty \rightarrow \text{مشتق تابع در } x=2 \text{ وجود ندارد}$$

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۲



تابع  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق‌پذیر است، هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد. ✓

اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است. ✗

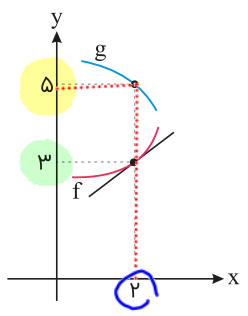
با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آنگاه  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ،  $x > 0$ .

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۲

$$f'(n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h}$$

$$f'(n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{n+h} - \sqrt{n}}{h} \times \frac{\sqrt{n+h} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+h} + \sqrt{n}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n+h - n}{h(\sqrt{n+h} + \sqrt{n})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{n+h} + \sqrt{n})} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

باتوجه به نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2}$  چندبرابر  $f'(2)$  است؟ **کابرابر**



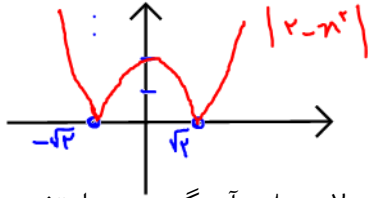
$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{f(n)g(2) - 3g(2)}{n-2} = g(2) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{f(n) - 3}{n-2}$$

$$= 5 \lim_{n \rightarrow 2} \frac{f(n) - f(2)}{n-2} = 5 f'(2)$$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۴۰۲

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۴۰۲



نقطه (1, 1) یک نقطه گوشه‌ای برای تابع  $f(x) = |2 - x^2|$  است. ۲۳

$$2 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

در تابعی با ضابطه  $f(t) = \frac{120}{t} + 5$  مجموع آهنگ لحظه‌ای تغییر در لحظه  $t = 2$  و آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(t)$  در بازه  $[4, 6]$  را بیابید. ۲۴

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۲

اگر  $f(x) = \cos 2x$  باشد، مقدار  $f''\left(\frac{\pi}{8}\right)$  را به دست آورید. ۲۵

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۲

مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۲

$$f(x) = (\omega x^3 - x)^9 (\sqrt{2x+1})$$

۲۶

$$g(x) = \frac{4 \tan x}{3x^2 - 1}$$

۲۷

مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & ; x < 1 \\ 2x^2 - 3 & ; x \geq 1 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید. ۲۸

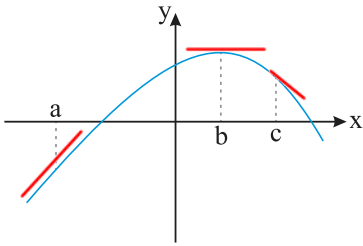
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۲

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۲

۲۹ تابع  $f(x) = [x]$  در نقطه  $x = 1$  مشتق پذیر است.

۳۰ باتوجه به نمودار تابع  $f$ ، اگر شیب خط مماس در نقاط  $a, b, c$  به ترتیب با  $m_a, m_b, m_c$  نمایش داده شود، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



(۱)  $m_c > m_b > m_a$

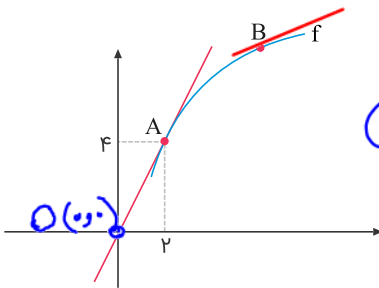
(۲)  $m_b > m_a > m_c$

(۳)  $m_a > m_b > m_c$  ✓

(۴)  $m_c = m_b = m_a$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۴۰۱

۳۱ نمودار تابع  $f$  به صورت زیر رسم شده است. اگر خط  $d$  در نقطه  $A$  بر نمودار تابع  $f$  مماس باشد:



شیب خط مماس  $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{f(n) - f(2)}{n - 2} = f'(2)$

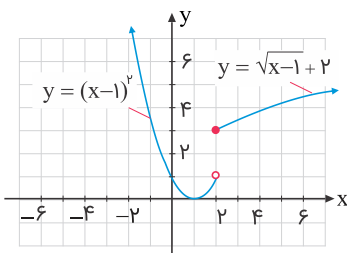
شیب خط مماس  $= \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2 \rightarrow f'(2) = 2$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۴۰۱

الف حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  را بیابید.

ب شیب خطهای مماس در نقاط  $A$  و  $B$  را مقایسه کنید.  $m_A > m_B$

۳۲ نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 2 & ; x \geq 2 \\ (x-1)^2 & ; x < 2 \end{cases}$  به صورت زیر است:



(انت) چون تابع در  $x = 2$  پیوسته نیست  $\leftarrow$  مشتق ناپذیر

با بررسی مشتق پذیری در  $(-\infty, 2)$   $\leftarrow$  بله مشتق پذیر است

نقطه مشتق ناپذیری ندارد

(ب)  $f'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۴۰۱

$n = 2 \rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$

الف آیا تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  مشتق پذیر است؟

ب آیا تابع در بازه  $(-\infty, 2)$  مشتق پذیر است؟ چرا؟

پ مشتق راست تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  را به دست آورید.

۳۳ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۴۰۱

$$f(x) = x(x-1)(x+1) \xrightarrow{x^3-1} = x^3 - x \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$u^3 \rightarrow 3u^2 u'$$

الف

$$g(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3 \rightarrow g'(x) = 3x \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2 x \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)'$$

$$g'(x) = 3x \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2 x \frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2}$$

ب

۳۴ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله  $h(x) = -4t^2 + 40t$  به دست می‌آید.

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۴۰۱

الف سرعت متوسط در بازه  $[2, 4]$  را بیابید.

$$h'(x) = 16$$

ب در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟

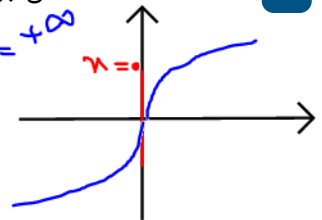
۳۵ معادله خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  را در نقطه‌ای به طول  $x = 0$  واقع بر نمودار تابع بنویسید.  $x = 0$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۱

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[2]{x^2}} \rightarrow f'(0) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

یعنی شیب خط مماس  $\infty$  است ← مماس عمود بر محور عمودی است

$x = 0$



۳۶ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۱

الف اگر  $f'(1) = 2$  و  $g'(1) = -3$  باشد، حاصل  $(3f + g)'(1)$  برابر ۹ است.



۳۷

یک تودهٔ باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = \sqrt{t} + 2t$  گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ زمانی  $0 \leq t \leq 4$  می‌شود؟

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۱

آهنگ متوسط  $\Rightarrow$

$$\frac{m(4) - m(0)}{4 - 0} = \frac{10 - 0}{4} = \frac{5}{2}$$

سین آهنگ رشد (فیزیکی)

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{t} = 2 \rightarrow t = 1$$

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۱

۳۸

اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته نباشد، آنگاه  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر نیست.

۳۹

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۱

الف

$$f(x) = \sqrt{7x}(3x^2 + 2)$$

ب

$$g(x) = \cos^3(2x) - \frac{1}{x}$$

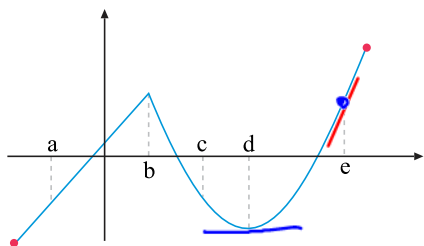
۴۰

مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x \geq 1 \\ 3x - 1 & ; x < 1 \end{cases}$  را در  $x = 1$  بررسی کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۱

۴۱

با در نظر گرفتن نمودار تابع  $f$  در شکل زیر از بین نقاط مشخص شده، مطلوب است طول نقطه‌ای که:



الف) مشتق پذیر است  $\leftarrow b$

ب)  $d$

ج)  $e$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۱

الف تابع در آن مشتق پذیر نیست.

ب مماس در آن موازی محور طول‌هاست.

پ مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است.

۴۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۱

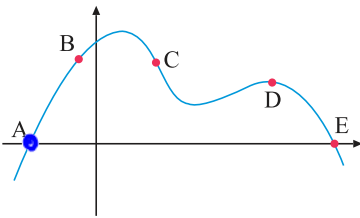
$$f(x) = (4x^2 - 5x)^3 (\sqrt{x} + 1)$$

الف

$$h(x) = \sin(3x^2) \rightarrow (3x^2)' \cos(3x^2) = 6x \cos(3x^2)$$

ب

۴۳ از بین نقاط مشخص شده A, B, C, D و E روی نمودار زیر، در کدام نقطه:



امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۴۰۱

الف مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟ A

ب مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟ C

۴۴ تابع  $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$  قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود شصت ماهگی نشان می‌دهد، که در آن  $x$  مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی  $[0, 25]$  چقدر است؟

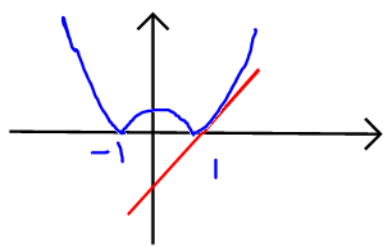
امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۴۰۱

$$\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0}$$

۴۵ معادله نیم مماس راست تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  را در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  واقع بر منحنی بنویسید. ۴۵

۴۶ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) ۴۶

$f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$ 
 $f'(x) = \frac{\left(\frac{9x-2}{x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$



$f'(x) = \frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}(x+1)^2} = \frac{11}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}(x+1)^2}$

۴۷ اگر  $f(x) = \begin{cases} ax+1 & ; x < 0 \\ x^2 + 3x+1 & ; x \geq 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  مشتق پذیر باشد، مقدار  $a$  را محاسبه کنید. ۴۷

$f'(x) = \begin{cases} a & x \leq 0 \\ 2x+3 & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \\ 2(0)+3 = a \\ 3 = a \end{cases}$

۴۸ اگر توابع  $f, g$  مشتق پذیر باشند و  $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$  حاصل  $(fg)'(2)$  را به دست آورید. ۴۸

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۴۰۱

۴۹ اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت  $f(t) = t^3 - t$  بر حسب متر باشد، در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است؟ ۴۹

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۱

مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۱

$f(x) = (-3x^2 + x)^5 (2x)$

۵۰

$$g(x) = 5 \tan x + \sin x^2$$

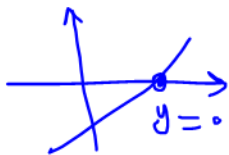
$$\begin{aligned} \sin^2 x &\rightarrow 2 \sin x \cos x \\ \sin(x^2) &\rightarrow 2x \cos(x^2) \end{aligned}$$

۵۱

$$h(x) = \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

۵۲



برای تابع  $f(x) = x^3 - 8$  در نقطه تقاطع آن با محور  $x$ ها معادله خط مماس را بنویسید.

۵۳

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۱

$$x^3 - 8 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \xrightarrow{x=2} f'(2) = 12 \leftarrow \text{شیب مماس} \\ y - y_0 &= m(x - x_0) \rightarrow y - 0 = 12(x - 2) \rightarrow y = 12x - 24 \end{aligned}$$

مشتق پذیری تابع  $f(x) = |2x - 4|$  را در  $x = 2$  بررسی کنید.

۵۴

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۱

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2x - 4| - 0}{x - 2} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

مشتق ناپذیر

$$f'_+(2) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = 2$$

$$f'_-(2) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{(x-2)}{x-2} = -2$$

$$f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

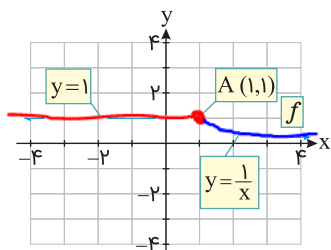
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۱

اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، آنگاه  $f'(a)$  وجود ندارد.

۵۵

با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع  $f$  در نقطه  $A$ ، نشان دهید که تابع  $f$  در نقطه  $A$  مشتق پذیر نیست.

۵۶

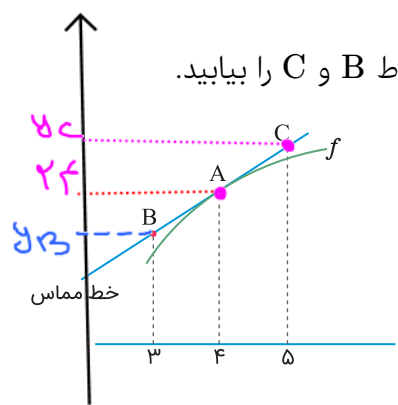


$$y = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۴۰۰

$$y' = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} f'_-(1) &= 0 \\ f'_+(1) &= -1 \end{aligned}$$

برای تابع  $f$  در شکل زیر داریم  $f'(4) = 1/5$  و  $f(4) = 24$ . باتوجه به شکل، مختصات نقاط  $B$  و  $C$  را بیابید.



$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = 1/5 \rightarrow \frac{y_C - 24}{5 - 4} = 1/5$$

$$y_C = 25.15$$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1/5 \rightarrow \frac{y_B - 24}{3 - 4} = 1/5$$

$$y_B = 22.15$$

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۴۰۰

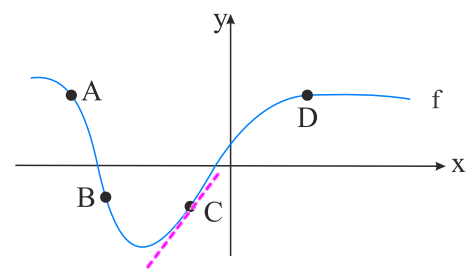
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۰

$$g(x) = 3 \tan^2 x + \cos x^2 = 3 \times (\tan x)^2 + \cos(x^2)$$

$$3 \times 2 \times (\tan x)(1 + \tan^2 x) + (-2x) \sin(x^2)$$

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۰



در نقطه ..... از نمودار بالا، مقادیر  $f'$  و  $f''$  هر دو مثبت است.

نقطه بالا

شیب خط مماس بر منحنی  $y = 1 - 5x^2 - 2x$  در نقطه‌ای به طول  $-2$  واقع بر آن برابر ..... است.

۶۱ در تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x+2 & x \geq -1 \end{cases}$  نشان دهید  $f'_+(-1)$  و  $f'_-(-1)$  موجودند، ولی  $f'(-1)$  موجود نیست.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۰

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \\ 1 & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_-(-1) &= -2 \\ f'_+(-1) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(-1) \text{ وجود ندارد}$$

۶۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۴۰۰

$$f(x) = (x^2 - 6)^3 \left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

الف

$$g(x) = \sin^3(\Delta x)$$

ب

$$h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x + 1}$$

پ

۶۳ مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۰

$$f(x) = \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2 + \sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = \frac{(x \sin \frac{x}{2})'(x^2 + \sqrt{x}) - (x^2 + \sqrt{x})' x \sin \frac{x}{2}}{(x^2 + \sqrt{x})^2}$$

الف

$$f'(x) = \frac{x \frac{1}{2} \cos(\frac{x}{2})(x^2 + \sqrt{x}) - (2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}) x \sin \frac{x}{2}}{(x^2 + \sqrt{x})^2}$$

$$g(x) = 3x(x^2 - 6x)^3 + \cos 2x$$

ب

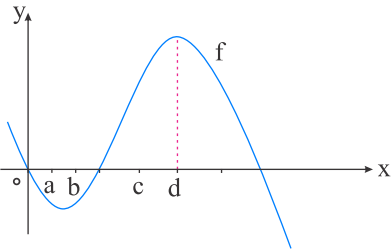
۶۴ مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = 4x(1 - |x|)$  را در نقطه  $x = 0$  بررسی کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۴۰۰

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{4n(1 - |n|) - 0}{n}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{4n(1-n)}{n} = \lim_{n \rightarrow 0^+} 4 - 4/n = 4 \\ f'_-(0) &= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{4n(1+n)}{n} = \lim_{n \rightarrow 0^-} 4 + 4/n = 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{در صورتی که } n=0$$

۶۵ با در نظر گرفتن نمودار تابع  $f$  در شکل زیر، نقاط به طول‌های  $a, b, c, d$  را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید.



x	d	b	c	a
f'(x)	0	0/5	2	-0/5

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۴۰۰

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۳۹۸

۶۶ اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$  نشان دهید  $f'_+(0)$  و  $f'_-(0)$  موجودند ولی  $f'(0)$  موجود نیست.

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۴۰۰

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

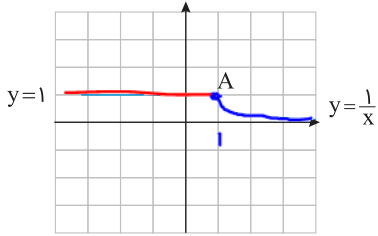
امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۴۰۰

$$g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$$

۶۷

۱۴۰۳/۲/۱۹

۶۸ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم شده زیر، مشتق پذیری تابع را در نقطه  $A(1, 1)$  بررسی کنید.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{مشتق چپ}} 0 \quad \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} f'_+(1) = -1 \\ f'_-(1) = 0 \end{array} \right\}$$

تابع در  $x=1$  مشتق ناپذیر است

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۴۰۰

$$A(x_0, y_0) = A(1, -1)$$

۶۹ معادله خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = x^3 - 2x$  را در نقطه  $A(1, f(1))$  به دست آورید.

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 3 - 2 = 1$$

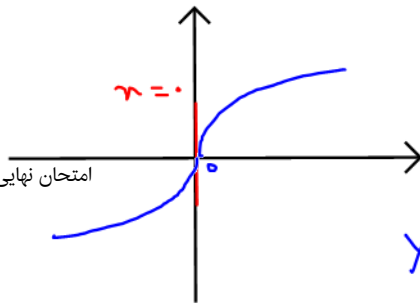
معادله خط:  $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y + 1 = 1(x - 1) \rightarrow y + 1 = x - 1 \rightarrow y = x - 2$$

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۳۹۹

۷۰ اگر خط  $x = a$  مماس قائم بر منحنی تابع  $f(x)$  در نقطه  $(a, f(a))$  باشد، آنگاه  $f'(a)$  موجود است.



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۳۹۹

۷۱ خط  $x = 1$  مماس قائم منحنی  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  است.

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۳۹۹

۷۲ اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته نباشد، آنگاه  $f$  در  $a$  مشتق پذیر هم نیست.

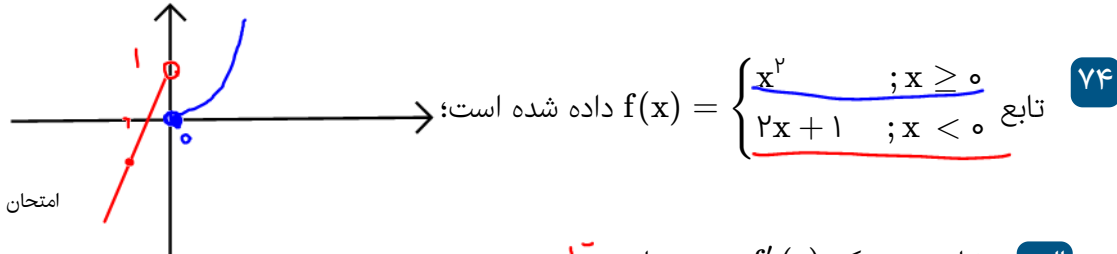
۷۳ تابعی وجود ندارد که برای آن هم  $f'(a) = 0$  و هم  $f(a) = 0$ .



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۳۹۹

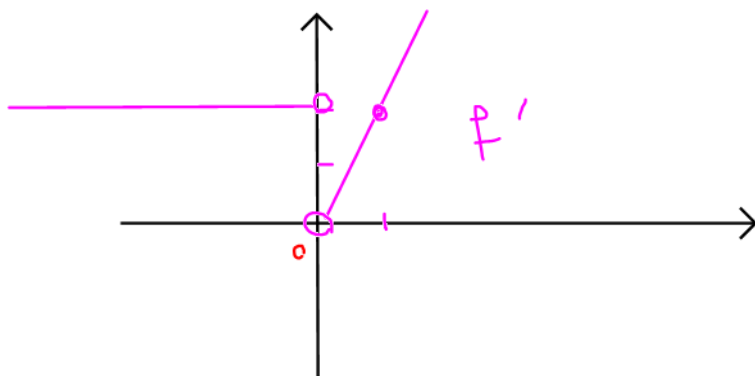


۷۴

الف نشان دهید که  $f'(0)$  وجود ندارد. تابع در  $x=0$  ناپیوسته است. مشتق ناپیوسته

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

ب ضابطه تابع مشتق را بنویسید.



پ نمودار تابع  $f'$  را رسم کنید.

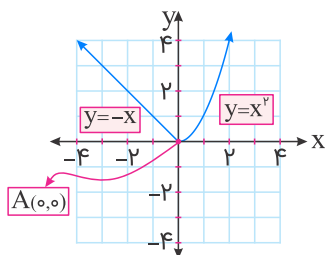
مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۳۹۹

$$f(x) = \left( \frac{x^2}{3x-1} \right)^5$$

۷۵

۷۶ با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه  $A$ ، نشان دهید این تابع در نقطه  $A$  مشتق پذیر نیست.



امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۳۹۹

۷۷ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۳۹۹

$u^3 \rightarrow 3u^2 u'$

$$h(x) = \sin^3 x + \cos^2 x = (\sin x)^3 + (\cos x)^2$$

$$3(\sin x)^2 (\sin x)' + 2 \cos x (\cos x)'$$

$$3 \sin^2 x \cos x + 2 \cos x (-\sin x) = 3 \sin^2 x \cos x - 2 \cos x \sin x$$

مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۳۹۹

$$f(x) = (4x^3 - 7)(2x - 1)^6$$

۷۸

$$g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$g'(x) = \frac{(1 - \sin x)' \cos x - (\cos x)' (1 - \sin x)}{\cos^2 x}$$

۷۹

$$g'(x) = \frac{-\cos x \times \cos x + \sin x (1 - \sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{a+b}{a} = b$$

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۳۹۹

$$h'(x) = 12x^3 + 4x$$

اگر  $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$  باشد، آنگاه  $h''(1)$  برابر ..... است. ۸۰

$$h''(x) = 36x^2 + 4 \xrightarrow{x=1} 36 + 4$$

اگر  $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$  مقدار  $f''(\frac{\pi}{6})$  را حساب کنید. ۸۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۳۹۹

$$f''(x) = 3 \times 2 \times \cos 2x$$

$$f'(x) = 2 \sin x (\sin x)' - (2x)' \sin 2x$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin 2x = 3 \sin 2x$$

اگر  $f(x) = x^2 - 3x$  باشد، با استفاده از تعریف مشتق  $f'(1)$  را حساب کنید. ۸۲

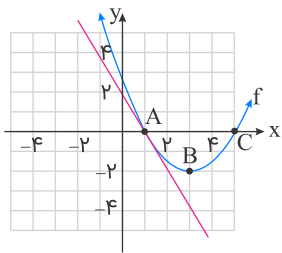
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۳۹۹

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad f(1) = -2$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 3(1+h) + 2}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 1 - 3 - 3h + 2}{h} = \frac{h^2 - h}{h} = \frac{h(h-1)}{h} = -1$$

در نمودار زیر، خط  $d$  در نقطه  $x = 1$  بر نمودار  $f$  مماس شده است:



$$A(1, 0) \quad B(0, 2)$$

$$m_{AB} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2$$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۳۹۹

**الف** مشتق تابع  $f$  را در نقطه  $x = 1$  محاسبه کنید.  $-2$

**ب** شیب نمودار را در نقاط  $B$  و  $C$  مقایسه کنید.  $m_C > m_B$

**۸۴** به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 4|$  را در نقطه  $x = -2$  بررسی کنید.

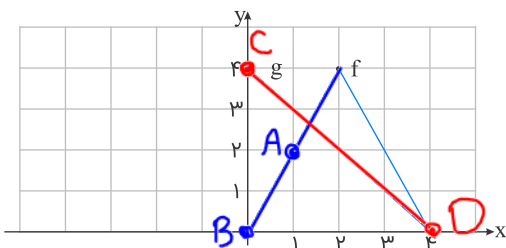
امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۳۹۹

در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی خرداد ۱۳۹۹

**۸۵** تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  در  $x = 0$  مشتق‌پذیر نیست. خط  $x = 0$  را <sup>۲</sup>..... منحنی می‌نامیم.

**۸۶** نمودار تابع  $f$  و  $g$  را در شکل زیر در نظر بگیرید. اگر  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  باشد،  $h'(1)$  را بیابید.



$A(1,2) \quad B(0,0)$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۳۹۸

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

$$h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g(1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

$$h'(1) = \frac{2 \times 2 - (-1) \times 2}{2^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$C(0,4) \quad D(4,0) \rightarrow g'(1) = \frac{0-4}{4-0} = -1$$

۸۷ مشتق تابع  $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x} - 1)^4$  را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی شهریور ۱۳۹۸

۸۸ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۳۹۸

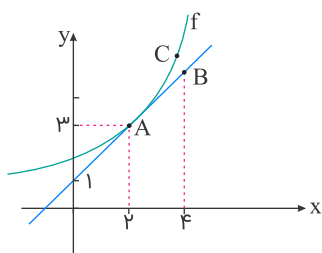
$$u^3 \rightarrow 3u^2 u'$$

$$g(x) = \sin^3(2x+1) = (\sin(2x+1))^3$$

الف

$$g'(x) = 3(\sin(2x+1))^2 (\sin(2x+1))' = 3 \sin^2(2x+1) \times 2 \cos(2x+1)$$

۸۹ در شکل زیر نمودار تابع  $f(x)$  و خط مماس بر منحنی آن در نقطه  $x=2$  داده شده است:



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان دی ۱۳۹۸

الف مشتق تابع  $f(x)$  را در نقطه  $x=2$  بیابید.

ب معادله خط مماس بر نمودار تابع در نقطه A را بنویسید.

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان شهریور ۱۳۹۸

$$u^4 \rightarrow 4u^3 u'$$

$$f(x) = (2x^3 + \sqrt{x} - 1)^4$$

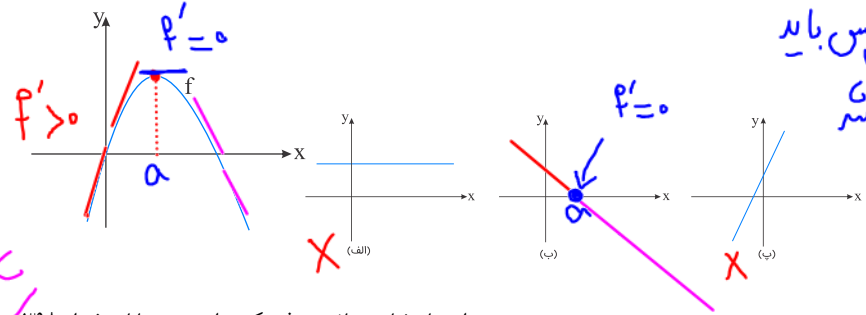
$$4(2x^3 + \sqrt{x} - 1)^3 (2x^3 + \sqrt{x} - 1)' = 4(2x^3 + \sqrt{x} - 1)^3 (6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$\cos u \rightarrow -u' \sin u$$

$$g(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

$$g'(x) = -\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = -\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

نمودار تابع f در شکل زیر آمده است. با بیان دلیل، مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است.



ست هب a شب خط مائل مثبت پس باید نمودار f با عرض مثبت درست هب همراه باشه  
در نقطه a مقدار شب خط مائل منفی است پس باید در نمودار f' روی محور x ها باشد  
درست است a شب خط مائل منفی است پس باید در نمودار f' با عرض منفی درست است همراه با

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۳۹۸

قضیه: ثابت کنید اگر تابع f در x = a مشتق پذیر باشد، آنگاه تابع f در x = a پیوسته است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۳۹۸

$$\lim_{n \rightarrow a} (f(n) - f(a)) = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow a} \left( \frac{f(n) - f(a)}{n - a} \times (n - a) \right) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a} \times \lim_{n \rightarrow a} (n - a) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f(n) - f(a)) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow a} f(n) = f(a) \xrightarrow{f'(a)} \text{تابع در } n=a \text{ پیوسته است}$$

نشان دهید نقطه‌ای به طول ۱، x = -۱، نقطه گوشه‌ای برای تابع f(x) = |x<sup>۲</sup> + x| است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم حسابان خرداد ۱۳۹۸